OSCILLATORE A SFASAMENTO

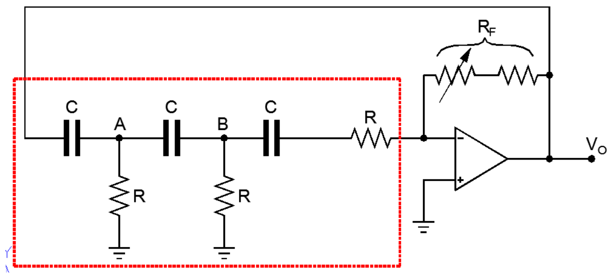


Figura 1

Analisi del circuito

Il circuito in esame è composto di un amplificatore invertente con guadagno regolabile.
La rete di retroazione (parte tratteggiata in rosso) è costituita da elementi passivi e più precisamente da tre celle CR in cascata.
Affinché tale circuito risulti oscillante, devono essere rispettate le condizioni di Barkausen:

$$|\beta \cdot A| = 1 \qquad\qquad \angle \beta \cdot A = 0$$

Dove β è la F.d.t. della rete di reazione ed A la F.d.t. dell'amplificatore.

Calcolo del guadagno d'anello

Il circuito può essere ridisegnato come quello di *Figura 2*.

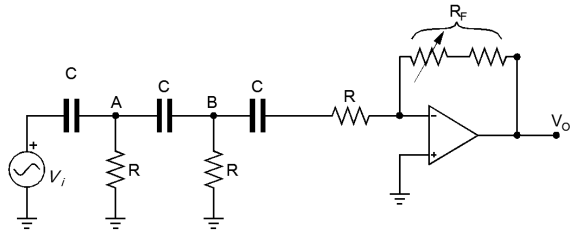


Figura 2

Si applica il teorema di Thevenin tra il punto A e la massa.
Il circuito si semplifica come mostrato in *Figura 3* dove:

$$V_{EQ1} = \frac{V_i \cdot R}{R + \frac{1}{sC}} = V_i \frac{sRC}{1+sRC} \qquad\qquad Z_{EQ1} = R // \frac{1}{sC} = \frac{\frac{1}{sC} \cdot R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{R}{1+sRC}$$

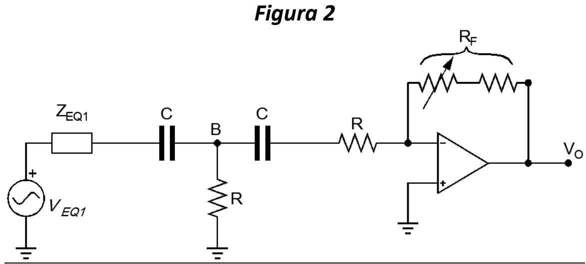


Figura 3

Si applica nuovamente il teorema di Thevenin tra il punto B e la massa.
Il circuito si semplifica come mostrato in *Figura 4* dove:

$$V_{EQ2} = R \cdot I_1 = R \frac{V_{EQ1}}{Z_{EQ1} + R + \frac{1}{sC}}$$

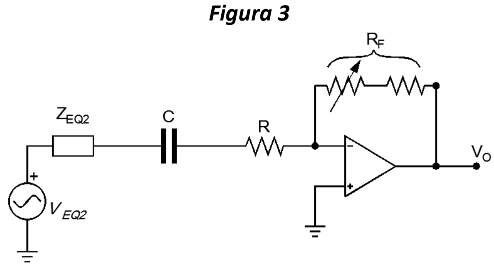


Figura 4

Sostituendo V_{EQ1} e Z_{EQ1} si ha:

$$V_{EQ2} = R \frac{\frac{V_i \cdot sRC}{1+sRC}}{\frac{R}{1+sRC} + R + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{V_i \cdot sR^2C}{1+sRC}}{\frac{sRC + sRC\cdot(1+sRC) + (1+sRC)}{sC\cdot(1+sRC)}} =$$

$$= \frac{V_i \cdot s^2R^2C^2}{sRC + sRC\cdot(1+sRC) + (1+sRC)} = \frac{V_i \cdot s^2R^2C^2}{sRC + sRC + s^2R^2C^2 + 1 + sRC} =$$

$$\boxed{= \frac{V_i \cdot s^2R^2C^2}{s^2R^2C^2 + 3sRC + 1}}$$

$$Z_{EQ2} = R // \left(Z_{EQ1} + \frac{1}{sC} \right) = R // \left(\frac{R}{1+sRC} + \frac{1}{sC} \right) = R // \left[\frac{sRC + 1 + sRC}{(1+sRC)\cdot sC} \right] =$$

$$= R // \left[\frac{1+2sRC}{(1+sRC)\cdot sC} \right] = \frac{R \cdot \frac{1+2sRC}{(1+sRC)\cdot sC}}{R + \frac{1+2sRC}{(1+sRC)\cdot sC}} = \frac{R \cdot \frac{1+2sRC}{(1+sRC)\cdot sC}}{\frac{(1+sRC)\cdot sRC + 1 + 2sRC}{(1+sRC)\cdot sC}} = \frac{R\cdot(1+2sRC)}{sRC + s^2R^2C^2 + 1 + 2sRC} = \boxed{\frac{R\cdot(1+2sRC)}{s^2R^2C^2 + 3sRC + 1}}$$

A questo punto si può ricavare la F.d.t. tenendo presente che la resistenza posta all'ingresso del piedino invertente sarà data dalla serie di Z_{EQ2}, C ed R:

$$\frac{V_O}{V_{EQ2}}=-\frac{R_F}{Z_{EQ2}+R+\frac{1}{sC}}=-\frac{R_F}{\frac{R\cdot(1+2sRC)}{s^2R^2C^2+3sRC+1}+\frac{1+sRC}{sC}}=-\frac{R_F}{\frac{sRC\cdot(1+2sRC)+(1+sRC)\cdot s^2R^2C^2+3sRC+1}{sC\cdot\left(s^2R^2C^2+3sRC+1\right)}}$$

Da cui: $$V_O=-V_{EQ2}\cdot\frac{sR_FC\cdot\left(s^2R^2C^2+3sRC+1\right)}{sRC\cdot(1+2sRC)+(1+sRC)\cdot\left(s^2R^2C^2+3sRC+1\right)}=$$

$$=-\frac{V_i\cdot s^2R^2C^2}{\left(s^2R^2C^2+3sRC+1\right)}\cdot\frac{sR_FC\cdot\left(s^2R^2C^2+3sRC+1\right)}{\underline{\underline{sRC}}+\underline{2s^2R^2C^2}+1+\underline{\underline{3sRC}}+\underline{s^2R^2C^2}+\underline{\underline{sRC}}+\underline{3s^2R^2C^2}+s^3R^3C^3}$$

Semplificando, raggruppando e ricordando che V_i = V_O (Da osservare nello schema di *Figura 1*) si ottiene:

$$1=-\frac{s^3R^2R_FC^3}{\underline{\underline{sRC}}+\underline{2s^2R^2C^2}+1+\underline{\underline{3sRC}}+\underline{s^2R^2C^2}+\underline{\underline{sRC}}+\underline{3s^2R^2C^2}+s^3R^3C^3}=-\frac{s^3R^2R_FC^3}{s^3R^3C^3+6s^2R^2C^2+5sRC+1}$$

In definitiva: $s^3R^3C^3+6s^2R^2C^2+5sRC+1=-s^3R^2R_FC^3 \quad\Rightarrow\quad s^3R^3C^3+s^3R^2R_FC^3+6s^2R^2C^2+5sRC+1=0$

Passando ora al dominio della variabile $j\omega$ si ottiene: $(j\omega)^3R^3C^3+(j\omega)^3R^2R_FC^3+6(j\omega)^2R^2C^2+5(j\omega)RC+1=0$

Ricordando che $j^2=-1$ si ottiene: $-j\omega^3R^3C^3-j\omega^3R^2R_FC^3-6\omega^2R^2C^2+5j\omega RC+1=0$

Raccogliendo parte reale e parte immaginaria si ottiene infine:

$$\boxed{1-6\omega^2R^2C^2+j\left(-\omega^3R^3C^3-\omega^3R^2R_FC^3+5\omega RC\right)=0} \qquad (1)$$

Ora, dovendo essere la funzione **REALE**, si deve annullare la parte immaginaria; cioè deve essere: $1-6\omega^2R^2C^2=0$

Da cui, in definitiva, si ricava: $6\omega^2R^2C^2=1 \quad\Rightarrow\quad \omega^2=\frac{1}{6R^2C^2}$. Ricordando che $\omega=2\cdot\pi\cdot f$ risulta:

$$\boxed{\omega=\frac{1}{\sqrt{6R^2C^2}} \quad\Rightarrow\quad f=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot RC\cdot\sqrt{6}}} \qquad (2)$$

Inoltre, dovendo essere la parte immaginaria dell'espressione (1) = 0 si ricava:

$-\omega^3R^3C^3-\omega^3R^2R_FC^3+5\omega RC=0$.

Mettendo in evidenza ωRC si ha: $\omega RC\cdot\left(-\omega^2R^2C^2-\omega^2RR_FC^2+5\right)=0$

Le soluzioni di questa equazione sono due. La prima non ha ovviamente senso; dovendo essere $\omega=2\cdot\pi\cdot f=0$

Dalla seconda, sostituendo al posto di ω il valore trovato nell'equazione (2) si ottiene:

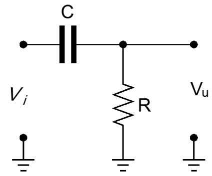
$$-\omega^2R^2C^2-\omega^2RR_FC^2+5=0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{6R^2C^2}R^2C^2-\frac{1}{6R^2C^2}RR_FC^2+5=0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{6}+5-\frac{1}{6R}\cdot R_F=0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{6}\cdot\frac{R_F}{R}+\frac{29}{6}=0$$

E quindi: $$\boxed{\frac{R_F}{R}=29 \quad\Rightarrow\quad R_F=29\,R}$$

Calcolo del modulo e della fase della singola rete CR

Ricaviamo Modulo e Fase di una singola cella CR. Si ha:

$$V_u(s)=V_i(s)\frac{R}{R+\frac{1}{sC}}=V_i(s)\frac{sRC}{1+sRC}=V_i(s)\frac{\frac{sRC}{sRC}}{\frac{1+sRC}{sRC}}=V_i(s)\frac{1}{1+\frac{1}{sRC}}$$



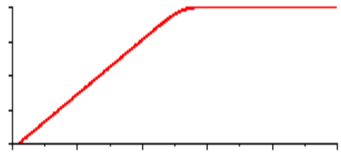
Circuito CR

Passando al dominio della variabile *jω* si ottiene:

$$V_u(j\omega)=V_i(j\omega)\frac{1}{1+\frac{1}{j\omega RC}}=V_i(j\omega)\frac{1}{1-j\frac{1}{\omega RC}}$$

Da ciò si ricava:

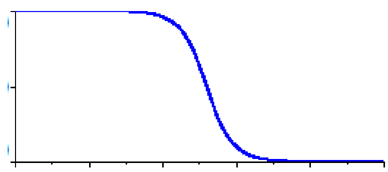
$$\begin{cases} per\ il\ \mathrm{mod}ulo: \quad |V_u(j\omega)|=|V_i(j\omega)|\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{\omega RC}\right)^2}} \\ per\ la\ \ fase: \quad \angle V_u(j\omega)=\angle V_i(j\omega)-\left(-\arctan\dfrac{1}{\omega RC}\right)=\angle V_i(j\omega)+\arctan\dfrac{1}{\omega RC} \end{cases}$$



Modulo

Osserviamo cosa succede per $\omega=0$ e per $\omega=\infty$:

$$\begin{cases} \omega=0: \quad \Rightarrow |V_u(j\omega)|=0, \qquad \angle V_u(j\omega)=+90° \\ \omega=\infty: \quad \Rightarrow |V_u(j\omega)|=|V_i(j\omega)|, \qquad \angle V_u(j\omega)=0 \end{cases}$$



Fase

Conclusioni

Una sola cella CR produce quindi uno sfasamento compreso tra 0° e 90°.
Per avere uno sfasamento complessivo di 180° occorrono tre celle CR in cascata.